Bepalen van de inhoud met peilstift meting

Een vriend van mij vroeg me eens hoe hij de inhoud van zijn mazout tank kan meten met een eenvoudige peilstift.

Gegeven:	(1) Doormeter van de ketel:	D = 2xR
	(2) Hoogte van brandstofpeil:	x
	(3) Lengte van het vat	L
	(4) ofwel de inhoud van het vat:	Inh

Gevraagd: Hoeveel liter mazout zit er in het vat?

Oplossing: Zie figuur 1

Het aantal liters in de tank is gelijk aan de oppervlakte van de dwarsdoorsnede onder de oliepeilmeting maal de lengte van het vat.

Indien de totale inhoud van het vat gegeven is (4) dan is L=Inh/πR2

In de dwarsdoorsnede zien we dat de oppervlakte van het segment AFBC gelijk is oppervlakte boogsegment AOBC vermindert met driehoek AOB ofwel:

Opp AFBC = OppAOBC – OppAOB *(1)*

Nu is

Opp AOFBC $= \pi R^2 . \alpha / 2\pi$

De hoek α gaat van *0°* tot *360°* of in radialen uitgedrukt van *0* tot *2π*.

Als de hoek *0°* is dan is de oppervlakte gelijk aan *0*.

Als de hoek *180° of π* dan is de oppervlakte gelijk aan $\pi R^2/2$

Als de hoek *360° of 2π* dan is de oppervlakte gelijk aan πR^2

Nu is

$R.\cos(\alpha/2) = OF$

$= R - x$

dus $\cos(\alpha/2) = (R-x)/R$

en $\alpha/2 = \cos^{-1}((R-x)/R)$

of $\alpha = 2.\cos^{-1}(R-x/R)$

OppAOB $= AB/2 \times OF$

Hierin is *AB/2* = $AB/2 = \sqrt{R^2 - (R-x)^2}$

En *OF* $= R - x$

Vullen we dit in in (1) dan bekomen we

$Opp\ AFBC = \pi R^2.\alpha/2\pi - \sqrt{R^2 - (R-x)^2}.(R-x)$

$Opp\ AFBC = \pi R^2/(2\pi).\ 2.\cos^{-1}(R-x/R) - \sqrt{R^2 - (R-x)^2}.(R-x)$

$Opp\ AFBC = R^2/.\cos^{-1}(R-x/R) - \sqrt{R^2 - (R-x)^2}.(R-x)$

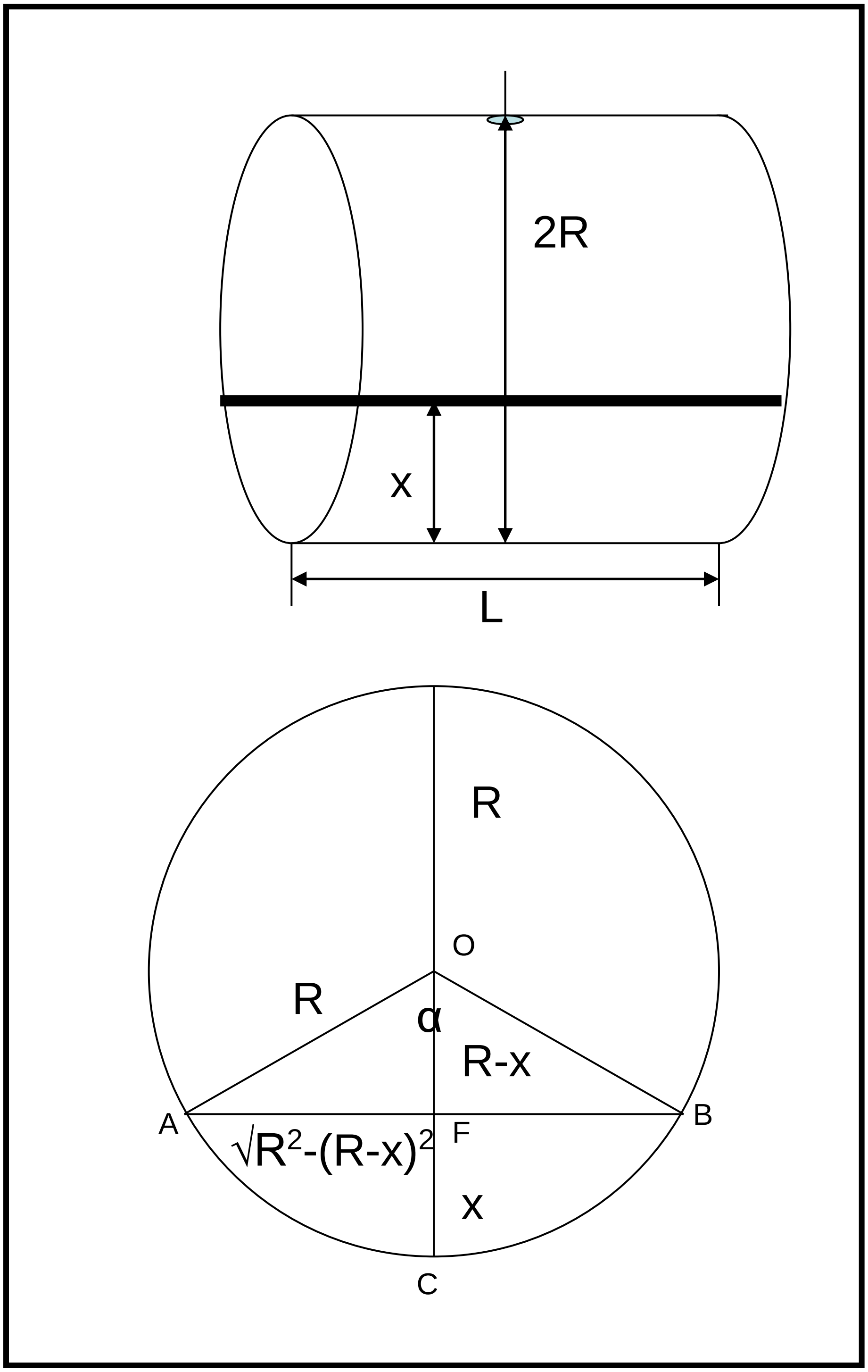

FIG1

De moeilijkheid van deze formule is dat men een rekenmachientje nodig heeft om $cos^{-1}(R\text{-}x/R)$ uit te rekenen.
Nu weten we uit de reeksontwikkeling dat

$\cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - (x + \frac{x^3}{6} + \frac{3.x^5}{40}.......)$ Met deze benadering zitten we binnen 1% van de juiste waarde.

Dit toegepast in onze formule geeft uiteindelijk als resultaat:

$$oppAFBC = R^2.\left[\frac{\pi}{2} - \left[\left(\frac{R-x}{R}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{R-x}{R}\right)^3 + \frac{3}{40}\left(\frac{R-x}{R}\right)^5\right]\right] - \sqrt{R^2 - (R-x)^2}.(R-x)$$

en uiteindelijk het aantal liters indien alles uitgedrukt is in dm

$$InhBradstof = \left\{ R^2.\left[\frac{\pi}{2} - \left[\left(\frac{R-x}{R}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{R-x}{R}\right)^3 + \frac{3}{40}\left(\frac{R-x}{R}\right)^5\right]\right] - \sqrt{R^2 - (R-x)^2}.(R-x) \right\}.L$$

Ziehier de gezochte relatie tussen de meting van de peilstift (x) en de diameter van het vat (*R=D/2)* en de lengte van het vat *(L).*

Indien je deze formule te ingewikkeld vindt kan er een eenvoudiger formule opgesteld worden waarin *α = 2.cos*$^{-1}$*(R-x/R)* voorgesteld wordt door een curve.

Hierin kan (x) de peilhoogte variëren van 0 tot 2R en daardoor verandert tussen de grenzen 1 en -1.

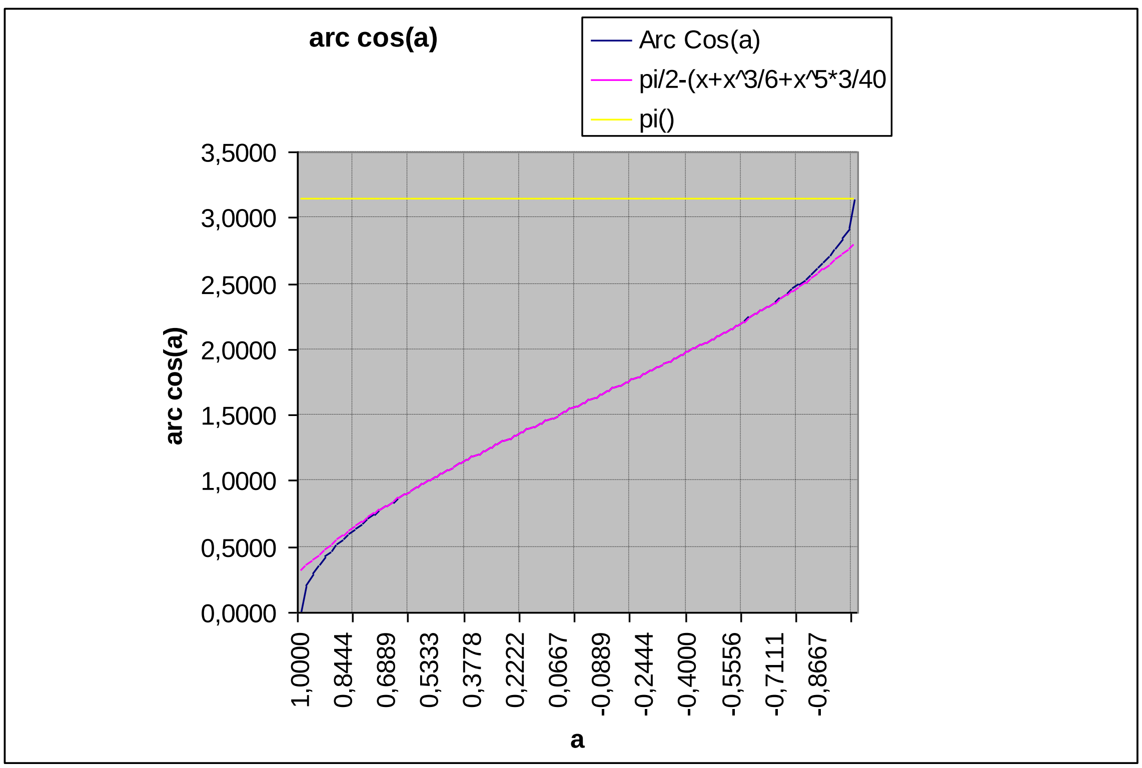

fig 2

In deze curve zijn 2 curves opgenomen, namelijk de exacte uitwerking van de formule *α = 2.cos*$^{-1}$*(R-x/R)* en de reeksontwikkeling $\cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - (x + \frac{x^3}{6} + \frac{3.x^5}{40}.......)$

Uit deze curves blijkt dat de reeksontwikkeling een zeer goede benadering is van arc cos(a) behalve onder de 10° en boven de 90° van de totale inhoud.
Er is echter nog een betere benadering en dat is met de Chebyshev approximation formule. Deze heb ik echter nog niet uitgewerkt voor arc cos(a).

Jan Spaenjers